1. Soluție: ***Pauză de odihnă***

Se dă:

$P = 535N$

$\alpha = 80^o$

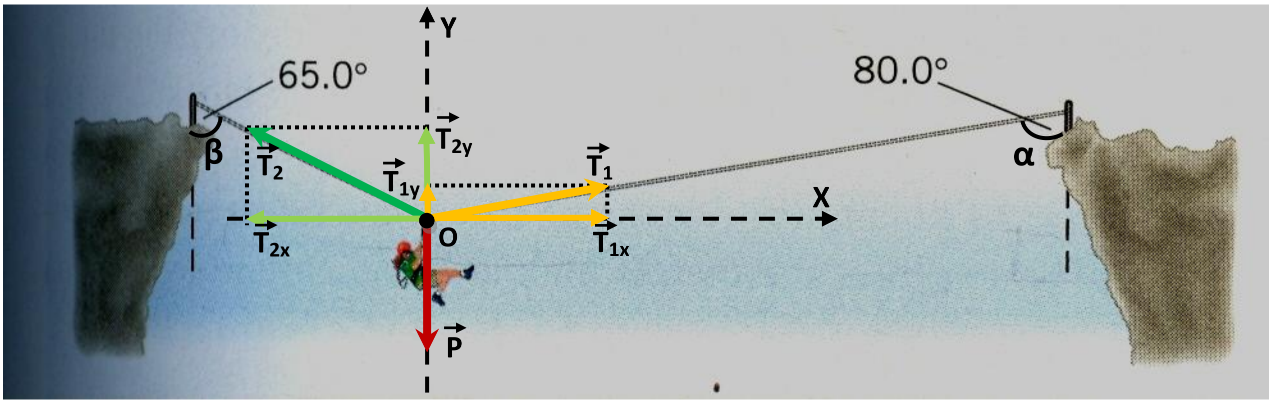
$\beta = 65^o$

Se cere:

T_1 - ?

T_2 - ?

Rezolvare:



Deoarece alpinista se află în echilibru la fel şi funia, vom examina condiția de echilibru a funiei. În punctul O unde acționează ponderea alpinistei $\vec{P}$, mai acționează şi $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ - tensiunile în frînghie.

Condițaia de echilibru va fi:

$$\vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \quad (1)$$

Proiectăm (1) pe OX şi OY, obținem:

$$\begin{cases} OX: T_{1x} - T_{2x} = 0 \\ OY: T_{1y} + T_{2y} - P = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \text{aici} \quad \begin{cases} T_{1x} = T_1 \sin\alpha \\ T_{2x} = T_2 \sin\beta \end{cases} \quad şi \quad \begin{cases} T_{1y} = T_1 \cos\alpha \\ T_{2y} = T_2 \cos\beta \end{cases} \quad (3) \text{ şi } (4)$$

Înlocuind (3) şi (4) în (2) vom avea:

$$\begin{cases} T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\beta = 0 \\ T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta - P = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Din (5) obținem tensiunele T_1 şi T_2 :

$$\boxed{T_1 = \frac{P \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}} \quad (6) \qquad \boxed{T_2 = \frac{P \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}} \quad (7)$$

Aici s-a utilizat următoarea formulă trigonometrică: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cos\beta$

Calcule: $T_1 = \dfrac{535N \sin 65^o}{\sin(65^o + 80^o)} \approx 502N$ respectiv $T_2 = \dfrac{535N \sin 85^o}{\sin(65^o + 80^o)} \approx 356N$

Răspuns: $T_1 \approx 502N$ şi $T_2 \approx 356N$

2. Soluție: ***delușoare, delușoare,....***

Se dă:	***Rezolvare:***
n=1,25 $\alpha=45^o$ $\beta=30^o$	

Se cere:

a) μ - ?

b) η_{AB} - ?

c) η_{BC} - ?

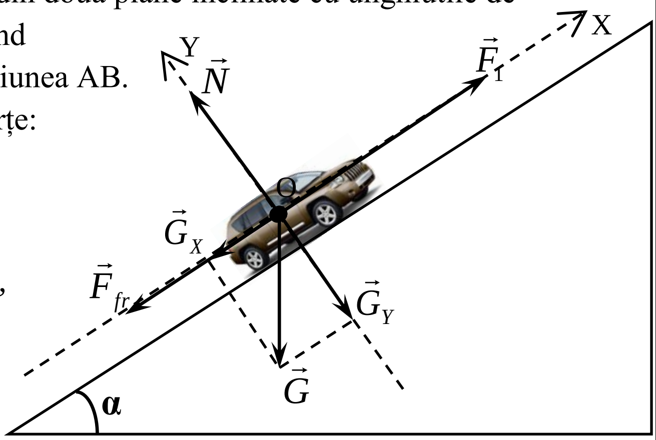
d) η_{ABC} - ?

e) γ - ?

f) η_{AC} - ?

g) Analiza.

a) Observăm că deluşorul de fapt constă din două plane înclinate cu unghiutile de înclinare α şi β. Vom analiza primul caz cînd automobilul urcă rectiliniu uniform pe porțiunea AB. Asupra Jeepului acționează următoarele forțe:



$\vec{F}_1$ - forța de tracțiune a motorului Jeep,

$\vec{G}$ - forța de greutate,

$\vec{N}$ - de reacțiune normală din partea drumului,

$\vec{F}_{fr}$ - de frecare dintre roți şi drum.

Deoarece corpul se mişcă rectiliniu uniform, atunci:

$\vec{F}_1+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_{fr}=0$ (1) unde $F_{fr}=\mu\cdot N$ (2)

Proiectăm (1) pe OX şi OY, obținem:

$$\begin{cases} OY: N-G_Y=0 \\ OX: F_1-F_{fr}-G_X=0 \end{cases} \quad (3) \quad \text{aici} \quad \begin{cases} G_Y=G\cos\alpha \\ G_X=G\sin\alpha \end{cases} \quad (4)$$

Introducem (4) şi (2) în (3):

$$\begin{cases} N-G\cos\alpha=0 \\ F_1-\mu N-G\sin\alpha=0 \end{cases} \quad (5)$$

Aici extragem pe N din prima ecuație şi-l introducem în a doua, obținem:

$$F_1-\mu G\cos\alpha-G\sin\alpha=0 \quad \Rightarrow \quad F_1=G(\sin\alpha+\mu\cos\alpha) \quad (6)$$

Analog se obține şi pentru cazul cînd Jeepul urcă panta cu unghiul β dezvoltînd o forță de tracțiune a F_2 :

$$F_2=G(\sin\beta+\mu\cos\beta) \quad (7)$$

Din condiția inițială cunoaştem că: $F_1=n\cdot F_2$ (8)

Substituim (6) şi (7) în (8):

$$G(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)=n\cdot G(\sin\beta+\mu\cos\beta)$$
$$\sin\alpha+\mu\cos\alpha=n\cdot(\sin\beta+\mu\cos\beta)$$
$$\sin\alpha+\mu\cos\alpha=n\cdot\sin\beta+\mu n\cos\beta$$
$$\mu\cos\alpha-\mu n\cos\beta=n\cdot\sin\beta-\sin\alpha$$
$$\mu\cdot(\cos\alpha-n\cdot\cos\beta)=n\cdot\sin\beta-\sin\alpha$$
$$\boxed{\mu=\frac{n\cdot\sin\beta-\sin\alpha}{\cos\alpha-n\cos\beta}} \quad (8)$$

Calculăm coieficientul de frecare μ :

$$\left[\textit{Vom lua}: \sin 45^o=\cos 45^o=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}707;\ \sin 30^o=\frac{1}{2}=0{,}5;\ \cos 30^o=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}866. \right]$$

$$\mu=\frac{1{,}25\cdot 0{,}5-0{,}707}{0{,}707-1{,}25\cdot 0{,}866}\approx 0{,}22$$

Răspuns: $\boxed{\mu\approx 0{,}22}$

Randamentul planului înclinat se defineşte: aici h – înălțimea planului înclinat, iar l - lungimea planului

$$\eta=\frac{L_{util}}{L_{consumat}}=\frac{G\cdot h}{F\cdot l}=\frac{G\sin\alpha}{F}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha} \quad (9),$$

unde F - forța necesară pentru a urca uniform.

b) Pentru porțiunea AB randamentul va fi: $\eta_{AB} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}$ (10)

Caclulăm: $\eta_{AB} = \dfrac{0{,}707}{0{,}707 + 0{,}22 \cdot 0{,}707} \approx 0{,}82$ ***Răspuns :*** $\boxed{\eta_{AB} = 82\ \%}$

c) Analog pentru porțiunea BC randamentul va fi: $\eta_{BC} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\beta + \mu\cos\beta}$ (11)

Caclulăm: $\eta_{BC} = \dfrac{0{,}5}{0{,}5 + 0{,}22 \cdot 0{,}866} \approx 0{,}724$ ***Răspuns :*** $\boxed{\eta_{BC} = 72{,}4\ \%}$

d) Randamentul deluşorului A-B-C este:

$$\eta_{ABC} = \frac{L_{util}}{L_{consumat}} = \frac{Gh}{L_1 + L_2} = \frac{G(h_1 + h_2)}{F_1 l + F_2 l} = \frac{G}{F_1 + F_2} \cdot \frac{h_1 + h_2}{l} = \frac{G}{F_1 + F_2} \cdot \left(\frac{h_1}{l} + \frac{h_2}{l}\right) = \frac{G}{F_1 + F_2} \cdot (\sin\alpha + \sin\beta) \quad (12)$$

Vom introduce formulele (6) şi (7) în (12) :

$$\eta_{ABC} = \frac{G}{G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + G(\sin\beta + \mu\cos\beta)} \cdot (\sin\alpha + \sin\beta) = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \mu(\cos\alpha + \cos\beta)}$$

Deci $$\eta_{ABC} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \mu(\cos\alpha + \cos\beta)} \quad (13)$$

Calculăm: $\eta_{ABC} = \dfrac{0{,}707 + 0{,}5}{0{,}707 + 0{,}5 + 0{,}22 \cdot (0{,}707 + 0{,}866)} \approx 0{,}778$ ***Răspuns :*** $\boxed{\eta_{ABC} = 77{,}8\ \%}$

e) Pentru a afla unghiul γ vom duce perpendiculara BB' pe AD,

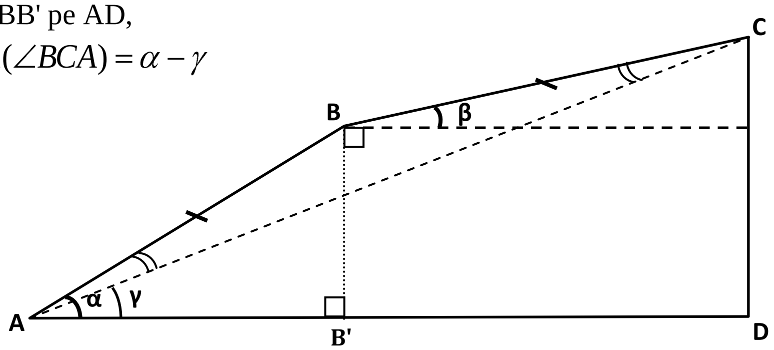
Triungiul ABC este isoscel, deci $m(\angle BAC) = m(\angle BCA) = \alpha - \gamma$

Observăm că $m(\angle ABB') = 90^o - \alpha$

Astfel în ΔABC vom avea:

$2(\alpha - \gamma) + 90^o + 90^o - \alpha + \beta = 180^o$ (14)

De unde : $\gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ (15)



Calculăm : $\gamma = \dfrac{45^o + 30^o}{2} = 37{,}5^o$ ***Răspuns:*** $\boxed{\gamma = 37{,}5^o}$

f) Randamentul pentru cazul în care drumul este AC este:

$\eta_{AC} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\gamma + \mu\cos\gamma}$ (16)

Calculăm: $\eta_{AC} = \dfrac{\sin 37{,}5^o}{\sin 37{,}5^o + 0{,}22 \cdot \cos 37{,}5^o} \approx 0{,}778$ ***Răspuns :*** $\boxed{\eta_{AC} = 77{,}8\ \%}$

g) Observăm că randamentul deluşorului este la fel ca cel al drumului rectiliniu.

Deci reieşind din condițiile problemei date nu obținem cîştig pentru economisirea combustibilului.

Se vede chiar şi matematic că dacă punem (15) în (16) şi apelăm la formule trigonometrice vom obține relația (13).

Totuşi astfel de drumuri într-adevăr dau cîştig dar în cazul mişcării accelerate.

Automobilul trecînd de la panta mai mare la cea mai mică se mişcă accelerat după inerție şi astfel obține o viteză mai mare pentru urcarea următoare, ceea ce este un avantaj.

3. Soluție: ***Pămîntul şi Marte***

Se dă:

$M_P=6\times10^{24}\,kg$

$M_M=0,11\cdot M_p$

$X_P=1,5\times10^{11}\,m$

$X_M=1,52\cdot X_P$

Se cere:

a) $\dfrac{F_{SP}}{F_{SM}}-?$

b) Xc-?

c) X_0-?

d) ΔX-?

Rezolvare:

a) $F_{PS}=k\dfrac{M_S\times M_P}{X_P^2}$ (1) - forța de interacțiune gravitațională Soare – Pămînt.

$F_{SM}=k\dfrac{M_S\times M_M}{X_M^2}$ (2) - forța de interacțiune gravitațională Soare – Martie.

Luăm raportul (1)/(2) : $\dfrac{F_{SP}}{F_{SM}}=\dfrac{k\dfrac{M_S\times M_P}{X_P^2}}{k\dfrac{M_S\times M_M}{X_M^2}}=\dfrac{M_P}{M_M}\cdot\left(\dfrac{X_M}{X_P}\right)^2$ (3)

Calcule: $\dfrac{F_{SP}}{F_{SM}}=\dfrac{M_P}{0,11\times M_P}\cdot\left(\dfrac{1,52\times X_P}{X_P}\right)^2=\dfrac{(1,52)^2}{0,11}\approx 21$

Răspuns: Forța de acțiune gravitațională asupra Pămîntului din partea Soarelui este de aproximativ 21 ori mai mare ca cea asupra lui Marte.

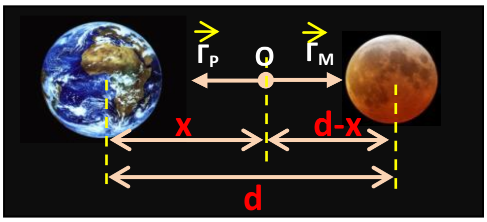
b) Poziția centrului de masă dintre aceste planete față de Soare se află după relația:

$$Xc=\frac{M_PX_P+M_MX_M}{M_P+M_M}\quad(4)$$

Calcule: $Xc=\dfrac{M_P\cdot X_P+0,11\cdot M_P\cdot1,52\cdot X_P}{M_P+0,11\cdot M_P}=\dfrac{1+0,11\cdot1,52}{1+0,11}X_P\approx1,05\cdot X_P\approx1,57\cdot10^{11}m$

Răspuns: Poziția centrului de masă este $Xc\approx1,05\cdot X_P\approx1,57\cdot10^{11}m$

c) Fie $X_0=X_P+x$ (5) - este distanța de la Soare pînă la punctul unde se anulează gravitația creată de Pămînt şi Marte.
Iar x- distanța dintre pămînt şi acest punct.



Condiția ca intensitatea cîmpului gravitațional rezultant să fie nulă este:

$$\vec{\Gamma}_P+\vec{\Gamma}_M=0\quad(6)$$

Scalar $\Gamma_P=\Gamma_M$ (7) unde $\Gamma_P=k\dfrac{M_P}{x^2}$ (8) intensitatea cîmpului gravitațional al Pămîntului în punctul O.

$\Gamma_M=k\dfrac{M_M}{(d-x)^2}$ (9) - intensitatea cîmpului gravitațional creat de Marte în punctul O. Aici $d=X_M-X_P$ (10)

Întroducem (9) şi (8) în (7) şi obținem: $k\dfrac{M_P}{x^2}=k\dfrac{M_M}{(d-x)^2}\Rightarrow(d-x)\sqrt{M_P}=x\sqrt{M_M}$

$$\text{Sau}\quad x=d\frac{\sqrt{M_P}}{\sqrt{M_P}+\sqrt{M_M}}=d\cdot\frac{M_P-\sqrt{M_P\cdot M_M}}{M_P-M_M}\quad(11)$$

Deci din (11), (10) şi (5) avem: $X_0 = X_P + (X_M - X_P)\cdot\frac{M_P - \sqrt{M_P M_M}}{M_P - M_M}$ (12)

Calcule:

$$X_0 = X_P + (1{,}52\cdot X_P - X_P)\cdot\frac{M_P - \sqrt{M_P\cdot 0{,}11\cdot M_P}}{M_P - 0{,}11\cdot M_P} = \left[1 + (1{,}52-1)\cdot\frac{1-\sqrt{0{,}11}}{1-0{,}11}\right]\cdot X_P \approx 1{,}39\cdot X_P \approx 2{,}08\cdot 10^{11} m$$

Răspuns: $X_0 \approx 1{,}39\cdot X_P \approx 2{,}08\cdot 10^{11} m$

d) $\Delta X = X_C - X_0$ (13)

Calcule: $\Delta X = 1{,}39\cdot X_P - 1{,}05\cdot X_P = 1{,}34\cdot X_P = 2{,}01\cdot 10^{11} m$

Răspuns: $\Delta X = 1{,}34\cdot X_P = 2{,}01\cdot 10^{11} m$

e) Cîmpul gravitațional creat de Pămînt şi Martie în regiunea centrului Soarelui este:

$\vec{\Gamma}_S = \vec{\Gamma}_{PS} + \vec{\Gamma}_{MS}$ (13) sau scalar $\Gamma_S = \Gamma_{PS} + \Gamma_{MS}$ (14) - intensitatea cîmpul rezultant.

$\Gamma_{PS} = k\frac{M_P}{X_P^2}$ (15) - intensitatea cîmpul creat de Pămînt în regiunea centrului Soarelui .

$\Gamma_{MS} = k\frac{M_M}{X_M^2}$ (16) - intensitatea cîmpul creat de Martie în regiunea centrului Soarelui .

Înlocuim (15) şi (16) în (14), obținem: $\Gamma_S = k\left(\frac{M_P}{X_P^2} + \frac{M_M}{X_M^2}\right)$(17)

În caz dacă nu ar exista Marte, pentru ca acțiunea gravitațională asupra Soarelui să rămînă aceeaşi e nevoie să se îndeplinească următoarea condiție: $\Gamma_S = \Gamma'_S$ (18)

Unde $\Gamma'_S = k\frac{M'_P}{X_P^2}$ (19) - intensitatea cîmpului creat de Pămîntul cu altă masă M'_P.

Înlocuind (17) şi (19) în (18) obținem : $k\left(\frac{M_P}{X_P^2} + \frac{M_M}{X_M^2}\right) = k\frac{M'_P}{X_P^2} \Rightarrow M'_P = M_P + M_M\left(\frac{X_P}{X_M}\right)^2$ (20)

Procentul ce arată cu cît masa Pămîntului ar fi mai mare se determină după relația:

$$\varepsilon_M = \frac{M'_P - M_P}{M_P}\times 100\,\% \quad (21)$$

Înlocuim (20) în (21) : $\boxed{\varepsilon_M = \frac{M_M}{M_P}\cdot\left(\frac{X_P}{X_M}\right)^2 \times 100\,\% \quad (22)}$

Calcule: $\varepsilon_M = \frac{0{,}11\cdot M_P}{M_P}\cdot\left(\frac{X_P}{1{,}52\cdot X_P}\right)^2 \times 100\,\% \approx \boxed{4{,}76\ \%}$ ***Răspuns:*** Aproximativ cu 4,76% mai mare.

4. Soluție: ***Ceainicul electric***

Se dă:

R=20Ω

$V=1,2\ l=1,2\cdot10^{-3}m^3$

U=220V

τ=5min=300s

$t_1=20^oC$

$$c = 4200\frac{J}{kg^oC}$$

$$D = 1\frac{g}{cm^3} = 1000\frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_{Au} = 2,2\cdot10^8\Omega\times m$$

$$\rho_{Kn} = 50\cdot10^8\Omega\times m$$

$$\eta_1 = \eta_2$$

Se cere:

a) explicație

b) η - ?

c) τ_1

Rezolvare:

a)
- În urma încălzirii apa se dilată destul de mult.
- La fierbere în urma spargerii bulelor suprafața apei este în mişcare intensivă.
- Vaporii care se elimină nu reuşesc să treacă prin orificiul şi produc o anumită presiune pe capac.

b) Randamentul ceainicului electric se determină după relația:

$$\eta = \frac{Q_{util}}{Q_{consumat}}\times100\% \qquad (1)$$

Unde :

$Q_{util} = c\cdot D\cdot V\cdot\left(t_f - t_1\right)$ (2) - cantitatea de căldură necesară pentru a aduce apa la fierbere.

$\mathrm{Q_{consumată}} = \frac{U^2}{R}\cdot\tau$ (3) - cantitatea de căldură disipată prin efect Joule de către spirala ciainicului.

Înlocuim (2) şi (3) în (1):

$$\boxed{\eta = \frac{c\cdot D\cdot V\cdot R\cdot\left(t_f - t_1\right)}{U^2\cdot\tau}\times100\%} \qquad (4)$$

Calcule:

$$\eta = \frac{4200\frac{J}{kg\cdot{}^oC}\cdot1000\frac{kg}{m^3}\cdot1,2\cdot10^{-3}m^3\cdot20\Omega\cdot(100^oC - 20^oC)}{(220V)^2\cdot300s}\times100\% \approx 67\%$$

Răspuns: $\eta \approx 67\%$

c) Deoarece $\eta_1 = \eta_2$ (5) , iar $R = \rho\frac{l}{S}$ (6)

Atunci:

$$\frac{Q_u\cdot\rho_{Kn}\cdot l}{U^2\cdot\tau\cdot S}\times100\% = \frac{Q_u\cdot\rho_{Au}\cdot l}{U^2\cdot\tau_1\cdot S}\times100\%$$

De unde obținem: $\boxed{\tau_1 = \tau\cdot\frac{\rho_{Au}}{\rho_{Kn}}}$ (7)

Calcule: $\tau_1 = 5min\cdot\frac{2,2\cdot10^8\Omega\times m}{50\cdot10^8\Omega\times m} = 0,22min = 13,2s$

Răspuns: $\tau_1 = 0,22min = 13,2s$